Математика Л-230911 06.12.2023

Урок №60

Тема: Понятие о непрерывности функции. Метод интервалов

Срок сдачи до 07.12.2023

Теоретическая часть:

Метод интервалов для нас не является новой темой. Мы его неоднократно применяли при решении квадратных неравенств. Сегодня рассмотрим применение метода интервалов к непрерывным функциям. Данный метод рассматривают при решении неравенств вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, где $P(x), Q(x), f(x)$ – многочлены. При этом знаки неравенств могут быть и нестрогие. Но в этом случае для дробно-рациональных неравенств нули знаменателя всегда будут исключаться из решения.

Обратите внимание, что правая часть любого из этих неравенств – число 0. Если это не задано по условию, то необходимо всё перенести в левую часть. Далее левую часть неравенства разложить на множители (если она не приведена к этому виду изначально) и найти нули каждого множителя. Необходимо помнить правило: произведение множителей равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Суть этого метода рассмотрим на конкретном примере. Откройте тетради и запишите число и тему урока. А далее вместе со мной решаем примеры с записью в тетрадь.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство $(x^2 + x + 1)(x - 3)^4(x + 1)^3(x - 5) > 0$.

Данное неравенство изначально задано в виде произведения многочленов, а его правая часть – число 0. Значит нам остается найти нули каждого множителя, приравняв по отдельности скобки к нулю.

$x^2 + x + 1 = 0$ или $(x - 3)^4 = 0$ или $(x + 1)^3 = 0$ или $x - 5 = 0$

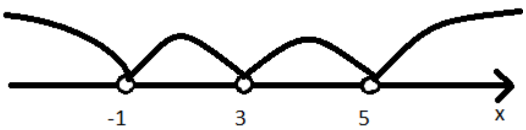
1) Рассмотрим уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ и найдем его корни. Оно не имеет решений и на всем промежутке изменения квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет положительный знак, т.е. $x^2 + x + 1 > 0$.

2) Рассмотрим уравнение $(x - 3)^4 = 0$. Его корнем является число 3, при этом кратность этого корня 4. Вспомните, на что влияет четная и нечетная кратность корня.

3) Рассмотрим уравнение $(x + 1)^3 = 0$. Его корнем является число -1, кратность которого 3.

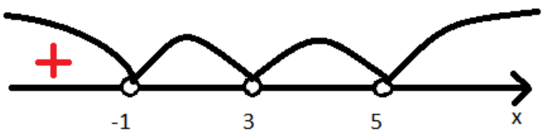
4) Рассмотрим уравнение $x - 5 = 0$. Его корень – число 5, кратности 1.

Т.е. нулями являются всего три числа: -1; 3; 5. Их необходимо нанести на числовую прямую. Точки будут не закрашены, ведь знак неравенства строгий.

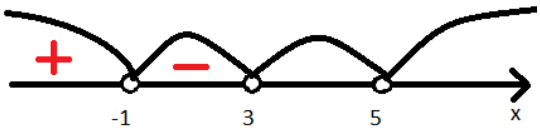


А далее необходимо определить знаки исходного неравенства на каждом интервале.

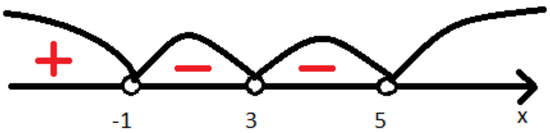
1) Рассмотрим интервал (-∞; -1). Выберем из этого интервала число -2 и подставим в неравенство $(x^2 + x + 1)(x - 3)^4(x + 1)^3(x - 5) > 0$. Получим знаки (+)(+)(-)(-)=+. Отметим знак «+» на числовой прямой.



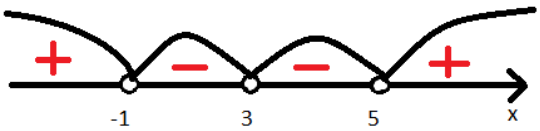
2) Рассмотрим интервал (-1; 3). Выберем из этого интервала число 0 и подставим в неравенство $(x^2+x+1)(x-3)^4(x+1)^3(x-5)>0$. Получим знаки (+)(+)(+)(-)=-. Отметим знак «-» на числовой прямой.



3) Рассмотрим интервал (3; 5). Выберем из этого интервала число 4 и подставим в неравенство $(x^2+x+1)(x-3)^4(x+1)^3(x-5)>0$. Получим знаки (+)(+)(+)(-)=-. Отметим знак «-» на числовой прямой.



4) Рассмотрим интервал (5; +∞). Выберем из этого интервала число 6 и подставим в неравенство $(x^2+x+1)(x-3)^4(x+1)^3(x-5)>0$. Получим знаки (+)(+)(+)(+)=+. Отметим знак «+» на числовой прямой.



Запишем ответ к неравенству. Нам необходимо больше нуля, значит знаки «+».

Ответ: $x\epsilon(-\infty;\ -1)\cup(5;\ +\infty)$.

Обратите внимание. Знаки не всегда чередуются. И на чередование знаков влияет кратность корня. Если корень нечетной кратности, то знаки слева и справа от него будут чередоваться. А если корень четной *кратности, то чередование не происходит, знаки слева и справа от корня будут одинаковые. Так вышло с x=3, т.к. его кратность равна 4.*

ПРИМЕР 2. Решим неравенство $\frac{x^2-5x+6}{1-x^3} < 0$.

Правая часть – число 0, но левая не задана в виде произведения (на самом деле это не столь важно, ведь мы сможем найти отдельно нули числителя и знаменателя). Вспомним, что дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

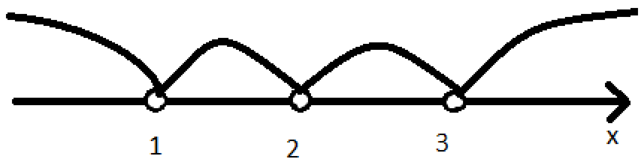
1) Приравняем числитель к нулю и решим уравнение.

$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x_1 = 2, \; x_2 = 3.$

2) Рассмотрим знаменатель и найдем его нуль, который необходимо исключить из числовой прямой.

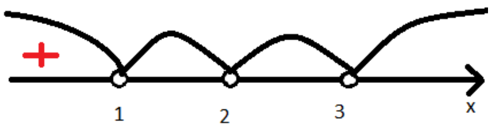
$1 - x^3 \neq 0, \quad x \neq 1.$

Нанесем нули числителя и нуль знаменателя на числовую прямую. Само неравенство перепишем в виде $\frac{x^2-5x+6}{1-x^3} = \frac{(x-2)(x-3)}{1-x^3} < 0$.

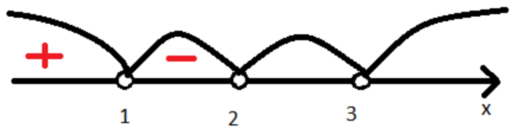


Снова определим знаки исходного неравенства на каждом интервале.

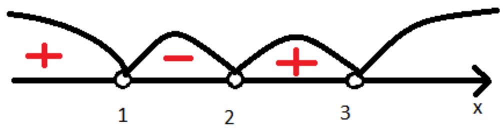
1) Рассмотрим интервал (-∞; 1). Выберем из этого интервала число 0 и подставим в неравенство $\frac{(x-2)(x-3)}{1-x^3} < 0$. Получим знаки $\frac{(-)(-)}{(+)} = +$. Отметим знак «+» на числовой прямой.



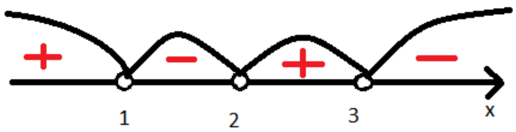
2) Рассмотрим интервал (1; 2). Выберем из этого интервала число 1,5 и подставим в неравенство $\frac{(x-2)(x-3)}{1-x^3} < 0$. Получим знаки $\frac{(-)(-)}{(-)} = -$. Отметим знак «-» на числовой прямой.



3) Рассмотрим интервал (2; 3). Выберем из этого интервала число 2,5 и подставим в неравенство $\frac{(x-2)(x-3)}{1-x^3} < 0$. Получим знаки $\frac{(+)(-)}{(-)} = +$. Отметим знак «+» на числовой прямой.



4) Рассмотрим интервал (3; +∞). Выберем из этого интервала число 5 и подставим в неравенство $\frac{(x-2)(x-3)}{1-x^3} < 0$. Получим знаки $\frac{(+)(+)}{(-)} = -$. Отметим знак «-» на числовой прямой.



Запишем ответ к неравенству. Нам необходимо меньше нуля, значит знаки «-».

Ответ: $x\epsilon(1; 2) \cup (3;\ +\infty)$.

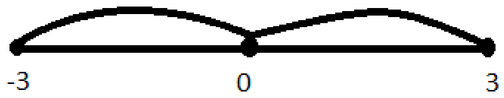
ДОМАШНЯЯ РАБОТА:

1. **Разобрать решение предложенного неравества и законспектировать в тетрадь:**

№1Решите неравенство: $(x^2 - 4x)\sqrt{9 - x^2} \leq 0$.

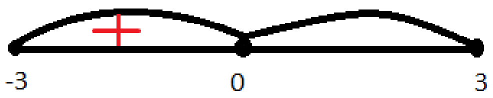
В неравенстве встретилась функция $y = \sqrt{9 - x^2}$. Она определена и непрерывна на множестве $9 - x^2 \geq 0$, $x^2 \leq 9$, $-3 \leq x \leq 3$. Т.е. множество, на котором мы будем находить решение заданного неравенства, имеет вид M=[-3; 3]. При этом числа -3 и 3 являются корнями.

Рассмотрим $x^2 - 4x = 0$, $x(x-4) = 0$. Откуда x=0 или x=4. Но x=4 не принадлежит множеству M, поэтому его на числовую прямую не наносим. Отметим на прямой числа -3; 0; 3.

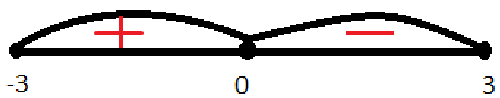


Определим знаки исходного неравенства на каждом интервале.

1) Рассмотрим промежуток [-3; 0]. Выберем из этого интервала число -1 и подставим в неравенство $(x^2 - 4x)\sqrt{9 - x^2} \leq 0$. Получим знаки (+)(+)=+. Отметим знак «+» на числовой прямой.



2) Рассмотрим промежуток [0; 3]. Выберем из этого интервала число 2 и подставим в неравенство $(x^2 - 4x)\sqrt{9 - x^2} \leq 0$. Получим знаки (-)(+)=-. Отметим знак «-» на числовой прямой.



Запишем ответ к неравенству. Нам необходимо меньше или равное нуля, значит знаки «-» и сами корни, т.к. в них выполняется равенство нулю.

Ответ: $x \epsilon \{-3\} \cup [0;\ 3]$.

2. Теперь самостоятельно выполните № 244а)б)